Zarządzanie
Lista nr 8

Zad 1. Sprawdzić istnienie granicy funkcji obliczając granice jednostronne:

$$a)\ f(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad x=1;\quad b)\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-4},\quad x=2;\quad c)\ f(x)=\frac{3}{9-x^2},\quad x=-3;$$

$$d)\ f(x)=2^{\frac{1}{2-x}},\quad x=2;\quad e)\ f(x)=3^{\frac{1}{(2-x)^2}},\quad x=2;\quad f)\ f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},\quad x=0.$$

Zad 2. Obliczyć granice:

$$1)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x};\quad 2)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right);\quad 3)\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1};\quad 4)\lim_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3};\quad 5)\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6};$$

$$6)\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^5+32};\quad 7)\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}};\quad 8)\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}};\quad 9)\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6}+1};$$

$$10)\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x};\quad 11)\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x;\quad 12)\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+2};\quad 13)\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\left(1+\frac{4}{x}\right)};\quad 14)\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$15)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x};\quad 16)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x};\quad 17)\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{4x};\quad 18)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x};\quad 19)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x};\quad 20)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$21)\lim_{x\to 0}(\sin 3x\cdot ctg5x);\quad 22)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-tgx)}{\cos 2x};\quad 23)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2}{1+2^{tgx}};\quad 24)\lim_{x\to 1^-}2^{\frac{1}{x-1}};\quad 25)\lim_{x\to 1^+}2^{\frac{1}{x-1}};$$

Zad 3. Czy funkcje są ciągłe w przedziale <0,2>?

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x^2 & dla\ 0\le x<1\\ 2-x & dla\ 1\le x\le 2\end{cases};\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}2x & dla\ 0\le x<1\\ 2-x & dla\ 1\le x\le 2\end{cases};$$

Zad 4. Zbadać ciągłość funkcji oraz naszkicować jej wykres. Jeżeli funkcja jest nieciągła, to określić rodzaj nieciągłości:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x+2}\ w\ punkcie\ x_0=1;\quad 2)\ f(x)=\frac{tgx}{x}\ w\ punkcie\ x_0=0;\quad 3)\ f(x)=\begin{cases}x^2 & dla\ x\ne 0\\ 2 & dla\ x=0\end{cases};$$

$$4)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & dla\ x\ne 0\\ 1 & dla\ x=0\end{cases};\quad 5)\ f(x)=\begin{cases}e^{-x^2} & dla\ x\ne 0\\ 0 & dla\ x=0\end{cases};\quad 6)\ f(x)=\begin{cases}-\log_{\frac{1}{2}}(x+3) & dla -3<x\le -2\\ \dfrac{\pi}{2} & dla -2<x\le 0\\ arctgx & dla\ x>0\end{cases};$$

Zad 5. Dla jakich wartości A i B funkcja

$$1)\ f(x)=\begin{cases}-2\sin x & dla\ x<-\dfrac{\pi}{2}\\ A\sin x+B & dla -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x & dla\ \dfrac{\pi}{2}\le x\end{cases};\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}A(2+e^{\frac{1}{x}}) & dla\ x<0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(2+e^{\frac{1}{x}}) & dla\ x=0\\ \dfrac{\sin Bx}{x} & dla\ x>0\end{cases};$$

jest ciągła w zbiorze R?

Zad 6. Uzasadnić, że podane równania mają rozwiązania we wskazanych przedziałach:

1) $e^x = \frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$; 2) $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\ln x + 2x = 1$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Zad 7. Czy funkcja $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \sin \pi x + 3$ przybiera wartość $\frac{7}{3}$ wewnątrz przedziału <-2,2>?

Zad 8. Korzystając z definicji Cauchy'ego oraz Heinego granicy funkcji wykazać, że:

$a) \lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0;$ $b) \lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{3}{5};$ $c) \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|} = \infty;$ $d) \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty.$

Zad. 9. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji wykazać, że nie istnieją granice funkcji:

$a) \lim\limits_{x\to\infty}\sin x;$ $b) \lim\limits_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x};$ $c) \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}+1}}.$

Zad 10. Czy można dobrać stałą A tak, aby funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} e^{x+\frac{|x|}{x}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ była ciągła w zerze?